由此本题导出了一个关于椭圆的焦点弦和准线相关斜率之和为定值的结论.

现在我们仅就椭圆焦点弦的性质及定值问题作一些补充和推广.在平时考试常见的有哪些具体的结论呢?

结论(1)设 P 点是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上异于长轴端点的任一点,为 F_1,F_2,为其焦点,记 $\angle F_1PF_2=\theta$,则(1) $|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$.(2) $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

证明:(1)由余弦定理:

$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta=(2c)^2\Rightarrow(|PF_1|+|PF_2|)^2=4c^2+2|PF_1||PF_2|(\cos\theta+1)\Rightarrow4a^2=4c^2+2|PF_1||PF_2|(\cos\theta+1)\Rightarrow|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{\cos\theta+1}$.

(2) $\because|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{\cos\theta+1}=\frac{b^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$,$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

结论(2)设 A,B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的不平行于对称轴且不过原点的弦,M 为线段 AB 的中点,则 $k_{OM}k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

证明:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$,则有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ 作差得:$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0\Rightarrow\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0\Rightarrow k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{b^2}{a^2k_{OM}}\Rightarrow$ $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

结论(3)过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任一点 $A(x_0,y_0)$ 任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于 B,C 两点,则直线 BC 有定向且 $k_{BC}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$(常数).

证明:设直线 AB:$y-y_0=k(x-x_0)$ 即 $y=kx+y_0-kx_0$,

$$\begin{cases}y=kx+y_0-kx_0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2k(y_0-kx_0)x+a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0$$

$$\Rightarrow x_0+x_B=\frac{2a^2k(kx_0-y_0)}{a^2k^2+b^2}\Rightarrow x_B=\frac{a^2k^2x_0-2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{a^2k^2x_0-2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2},\ \frac{b^2y_0-a^2k^2y_0-2b^2kx_0}{a^2k^2+b^2}\right).$$

同理 $C\left(\frac{a^2k^2x_0+2a^2ky_0-b^2x_0}{a^2k^2+b^2},\ \frac{b^2y_0-a^2k^2y_0+2b^2kx_0}{a^2k^2+b^2}\right)$,$\therefore k_{BC}=\frac{4b^2kx_0}{4a^2ky_0}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

结论(4)设已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($a>b>0$),$O$ 为坐标原点,P,Q 为椭圆上两动点,有且 $OP\perp OQ$.则(1) $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$;

(2) $|OP|^2+|OQ|^2$ 的最小值为 $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$;

(3) $S_{\Delta OPQ}$ 的最小值是 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

证明:(1)设 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$,$Q(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$,

$\because\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a^2\cos\theta\cos\varphi+b^2\sin\theta\sin\varphi=0\Rightarrow\tan\theta\tan\varphi=-\frac{a^2}{b^2}$

$$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}$$

$$=\frac{a^2(\cos^2\theta+\cos^2\varphi)+b^2(\sin^2\theta+\sin^2\varphi)}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}$$

$$=\frac{a^2(2+\tan^2\theta+\tan^2\varphi)+b^2(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)+2b^2\tan^2\theta\tan^2\varphi}{a^4+a^2b^2(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)+b^4\tan^2\theta\tan^2\varphi}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)+2a^2\frac{a^2+b^2}{b^2}}{2a^4+a^2b^2(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left[(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)+2\frac{a^2}{b^2}\right]}{2\frac{a^2}{b^2}+(\tan^2\theta+\tan^2\varphi)}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

(2) $\because(|OP|^2+|OQ|^2)\left(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}\right)\geqslant(1+1^2)=4$,当且仅当 $|OP|+|OQ|$ 时取"=",$\therefore|OP|^2+|OQ|^2\geqslant4\div\left(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}\right)=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

(3) $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.

$4S^2_{\triangle OPQ}=|OP|^2|OQ|^2=(|OP|^2+|OQ|^2)\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)\geqslant4\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)^2\Rightarrow S_{\Delta OPQ}\geqslant\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

$\therefore S_{\min}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

真题再现:(2018年高考全国卷III文20)已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点.线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

(1)**证明**:$k<-\frac{1}{2}$;

(2)设 F 为 C 的右焦点,F 为 C 上一点,且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$.证明:$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

解法1:(1)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.两式相减,并由 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得 $\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$,$\frac{y_1+y_2}{2}=m$,于是 $k=-\frac{3}{4m}$($m>0$).

又由点 $M(1,m)(m>0)$ 在椭圆内,即 $\frac{1}{4}+\frac{m^2}{3}<1$($m>0$),可得 $0<m<\frac{3}{2}$,

故 $k=-\frac{3}{4m}<-\frac{1}{2}$.

(2)由题意得 $F(1,0)$.设 $P(x_3,y_3)$,则 $(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+$